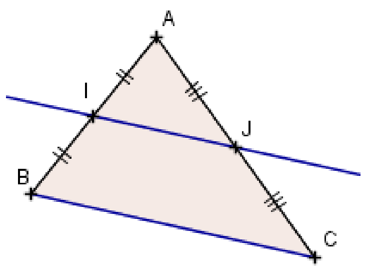
Triangles, milieux et parallèles

I. Propriété de la droite des milieux

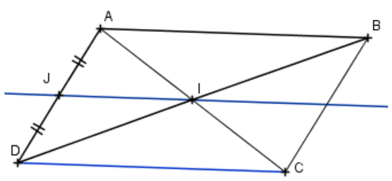
Propriété :
Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.



Dans le triangle ABC :
- ✓ I milieu de [AB]
- ✓ J milieu de [AC]

la propriété nous permet de **démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC)**.

Application n°1 :
ABCD est un parallélogramme. I est le point d'intersection de ses diagonales et J est le milieu de [AD].
Montrer que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.

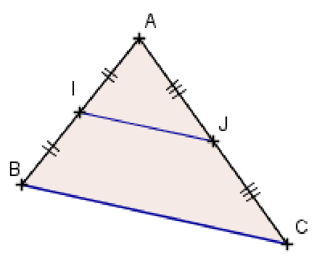


Solution :
On sait que ABCD est un parallélogramme.
*Or, **si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu**.*
Donc I est le milieu de [AC] (et de [BD])

Dans le triangle ACD,
on sait que I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AC].
*Or, **si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.***
Donc les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

II. Propriété d'un segment d'extrémités deux milieux de côtés

Propriété :
Si, un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.



Dans le triangle ABC :
- ✓ I milieu de [AB]
- ✓ J milieu de [AC]

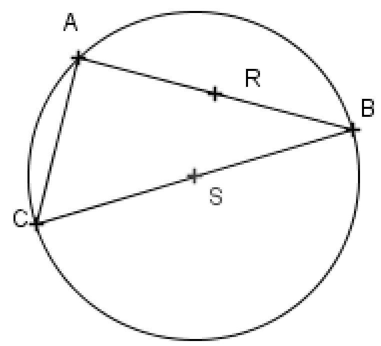
la propriété nous permet de
démontrer que : $IJ = \frac{BC}{2}$

Application n°2 :

Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle de diamètre [BC].

On a :

- ✓ S est le milieu de [BC]
- ✓ R est le milieu de [AB]
- ✓ AB = 8 cm et BC = 10 cm.



1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Calculer la longueur AC.
3. En déduire la longueur RS.

Solution :

1. *On sait que le point A appartient au cercle de diamètre [BC].*

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre un de ses côtés, alors il est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

*Donc **ABC est rectangle en A**.*

2. *On sait que le triangle ABC est rectangle en A.*

D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc $10^2 = 8^2 + AC^2$

Donc $AC^2 = 100 - 64$

$AC^2 = 36$

Donc $AC = \sqrt{36}\ cm$

AC = 6 cm.

3. *Dans le triangle ABC, on sait que R et S sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].*

*Or, **si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.***

Donc $RS = \frac{AC}{2}$,

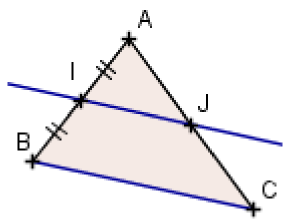
soit $RS = \frac{6}{2}\ cm$.

D'où $\boldsymbol{RS = 3\ cm}$.

III. Un milieu et une parallèle

Propriété :

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté ET est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.



Dans le triangle ABC :

- ✓ I milieu de [AB]
- ✓ J ϵ [AC]
- ✓ (IJ) // (BC)

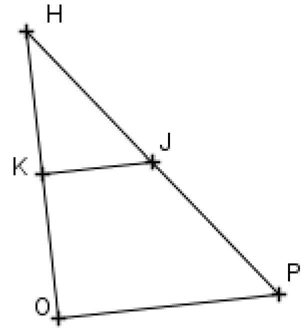
la propriété nous permet de **démontrer que :**

J est le milieu de [AC]

Application n°3 :

Sur la figure ci-contre :

- ✓ Le triangle HKJ est rectangle en K ;
- ✓ K est le milieu du segment [HO] ;
- ✓ HO = 4,8 cm, OP = 3,6 cm et HP = 6 cm.



1. Démontrer que le triangle HOP est rectangle.
2. En déduire que les droites (KJ) et (OP) sont parallèles.
3. Démontrer que le point J est le milieu du segment [HP].

Solution :

1. *Le plus grand côté de HOP est [HP]*
   D'une part $HP^2 = 6^2 = 36$
   D'autre part $HO^2 + OP^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$
   Donc : $HP^2 = HO^2 + OP^2$
   D'après ***la réciproque du théorème de Pythagore,***
   le triangle HOP est rectangle en O.

2. *On sait que les droites (KJ) et (OP) sont perpendiculaires à la même droite (OH).*
   Or, ***si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.***
   Donc les droites (KJ) et (OP) sont parallèles.

3. *Dans le triangle HOP,*
   on sait que : K est le milieu de [HO]
   J ϵ [HP]
   (KJ) // (OP).
   Or, ***si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.***
   Donc le point J est le milieu du segment [HP].